

1.4.4 Implikace

Předpoklady: 010403

Implikace

Implikace libovolných výroků a, b je výrok, který vznikne jejich spojením slovním obratem **jestliže, pak**, píšeme $a \Rightarrow b$ a čteme **jestliže a , pak b** .

Výroku a se říká **předpoklad**, výroku b **závěr**.

Kdy je implikace pravdivá?

Zkusíme rozbor konkrétní situace.

Veřejně slibuji Michalovi: Když přijdeš po rukou ke katedře, dám Ti 100 Kč.

Co se může přihodit, zachytíme v pravdivostní tabulce.

a	b	$a \Rightarrow b$	
1	1	1	Přijde a dám 100 Kč – měl jsem pravdu
1	0	0	Přijde a nedám 100 Kč – lhal jsem
0	1	1	Nepřijde a dám 100 Kč – měl jsem pravdu, o této možnosti jsem nehovořil
0	0	1	Nepřijde a nedám 100 Kč – měl jsem pravdu, o této možnosti jsem nehovořil

Pedagogická poznámka: První dva řádky jsou bez problémů, u druhých dvou se určitě objeví pochybnosti. Mělo by stačit, že zařvete: "Je tady snad někdo, kdo si myslí, že z toho, že si Michal nedošel po rukou ke katedře, vyplývá, že jsem lhal, když jsem mu za to slíbil 100 Kč?"

Poté se diskuse stočí maximálně k tomu, že se bude rozebírat, zda se dá o pravdivosti implikace rozhodnout. Pokud budete trvat na tom, že pravdivost je třeba přiřadit a že nejde o pravdivost výroků (pravdivost toho, že Michal přišel), ale pravdivost celku (tedy toho, že z jeho příchodu pro mě něco plyne), podaří se většinu přesvědčit. Ostatní to pak musí vzít jako fakt.

Správnost předchozí tabulky si můžeme zdůvodnit i na základě pravdivosti následujícího výroku: „Jestliže řeším příklad správně, získám správný výsledek.“

Tento výrok je zřejmě pravdivý. Jaké možnosti tato pravdivost zahrnuje:

- Řeším příklad správně a získám správný výsledek (první řádek tabulky $a = 1, b = 1$).
- Neřeším příklad správně a získám správný výsledek (stát se to může, když udělám větší počet chyb než jednu a ty se navzájem vyruší) (třetí řádek tabulky $a = 0, b = 1$).
- Neřeším příklad správně a nezískám správný výsledek (čtvrtý řádek tabulky $a = 0, b = 0$).

Jediné co se nemůže stát (kdy je tento výrok nepravdivý):

- Řeším příklad správně a nezískám správný výsledek (první řádek tabulky $a = 1, b = 0$).

Př. 1: Rozhodni, zda je pravdivý výrok: "Jestli je teď hodina matematiky, tak je jedna větší než nula".

Jde výrok složený ze dvou výroků:

a : Je hodina matematiky. – pravda (1)

b : Jedna je větší než nula. – pravda (1)

Celý výrok má tvar $a \Rightarrow b$, dosadíme pravdivosti výroků $1 \Rightarrow 1 = 1$.

Výrok je pravdivý.

Přesto je výrok z předchozího příkladu podivný. Pravdivost výroku $1 > 0$ přece nijak nesouvisí s tím, jestli je zrovna hodina matematiky ($1 > 0$ platí vždy, i o hodinách češtiny nebo dokonce i při přípravě ŠVP).

Dvě pojetí implikace:

- **běžná představa o implikaci:** Implikace vyjadřuje obsahovou blízkost výroků a, b . $a \Rightarrow b$ znamená, že oba výroky jsou svázané, že z pravdivosti a vyplývá pravdivost b .
- **implikace ve formální logice:** Implikace je forma, do které dosazujeme různé výroky a a b , a ona po dosazení (a zjištění jejich pravdivosti) vyprodukuje pravdivostní hodnotu výroku $a \Rightarrow b$ (v podstatě zařízení na produkci 0 a 1 v závislosti na vstupních hodnotách pravdivosti výroků a, b).

K čemu je dobrá formální logika, když vytváří pouze formy, do kterých teprve dosazujeme konkrétní výroky?

- Schopnost analyzovat obecné složené výroky nám umožní rychle rozhodnout o pravdivosti konkrétních složených výroků.
- Pokud zjistíme, že pro získané formy něco platí, nemusíme pro konkrétní výroky nic dokazovat.
- Získáme obecné způsoby, jak z konkrétních výroků sestavovat složené výroky s konkrétními vlastnostmi.
- ...

Pedagogická poznámka: Následující výroky využívají některé vlastnosti autora učebnice.

Jde o můj zvyk nosit stále stejné oblečení, konkrétně rifle a hnědobílou mikinu.

Následující výroky pak dokumentují, jak je to s pravdivostí implikací, které vycházejí z výroku zjevně pravdivého („Krynický má hnědobílou mikinu“) nebo z výroku zjevně nepravdivého („tabule je oranžová“). Podobné zvláštnosti má určitě každý učitel, takže si můžete sestavit podobné výroky na sebe.

Př. 2: Rozhodni, zda je pravdivý výrok: „Jestli má Krynický hnědobílou mikinu, pak je oranžová tabule.“

Jde výrok složený ze dvou výroků:

a : Krynický má hnědobílou mikinu – pravda (1)

b : Tabule je oranžová – nepravda (0)

Celý výrok má tvar $a \Rightarrow b$, dosadíme pravdivosti výroků $1 \Rightarrow 0 = 0$.

Výrok je nepravdivý.

Př. 3: Rozhodni, zda je pravdivý výrok: „Jestli je oranžová tabule, pak má Krynický hnědobílou mikinu.“

Jde výrok složený ze dvou výroků:

a : Tabule je oranžová – nepravda (0)

b : Krynický má hnědobílou mikinu – pravda (1)

Celý výrok má tvar $a \Rightarrow b$, dosadíme pravdivosti výroků $0 \Rightarrow 1 = 1$.

Výrok je pravdivý.

Z pravdivosti implikace $a \Rightarrow b$ nevyplývá pravdivost implikace $b \Rightarrow a$ (obrácená implikace). U implikace (na rozdíl od konjunkce a disjunkce) záleží na pořadí výroků!

Předchozí větu můžeme snadno dokumentovat pomocí následujících implikací:

Je-li číslo dělitelné šesti, je dělitelné i třemi. - původní implikace je pravdivá.

Je-li číslo dělitelné třemi, je dělitelné i šesti. - obrácená implikace je nepravdivá.

Př. 4: Rozhodni, zda je pravdivý výrok: „Jestliže je tabule oranžová, pak Krynický je hezká holka.“

Jde výrok složený ze dvou výroků:

a : Tabule je oranžová – nepravda (0)

b : Krynický je hezká holka – nepravda (0)

Celý výrok má tvar $a \Rightarrow b$, dosadíme pravdivosti výroků $0 \Rightarrow 0 = 1$.

Výrok je pravdivý.

Pedagogická poznámka: Studenti mají problém s tím, že pravdivá implikace může obsahovat i dvě zcela nesmyslná tvrzení. Je třeba pořád zdůrazňovat, že jde více o vzájemný vztah dvou výroků než o výroky samé. Jinak předchozí výrok je obdobou ještě dnes používaného „Jestli jsi chytil takovouhle rybu, tak já jsem čínskej bůh srandy“.

Př. 5: Urči pravdivostní hodnotu výroků.

a) Jestliže je Země kulatá, pak obíhá kolem Slunce.

b) Jestliže je Země kulatá, pak je plochá.

c) Jestliže je Země plochá, pak je kulatá.

d) Jestliže je Země plochá, pak se dá srolovat do igelitky.

Nejdříve si určíme pravdivost jednotlivých výroků:

Země je kulatá. – pravdivý výrok

Země obíhá kolem Slunce – pravdivý výrok

Země je plochá – nepravdivý výrok

Země se dá srolovat do igelitky – nepravdivý výrok

Teď rozebereme celé implikace.

a) Jestliže je Země kulatá, pak obíhá kolem Slunce. \Rightarrow výrok $1 \Rightarrow 1 = 1$ - pravda

b) Jestliže je Země kulatá, pak je plochá. \Rightarrow výrok $1 \Rightarrow 0 = 0$ - nepravda

c) Jestliže je Země plochá, pak je kulatá. \Rightarrow výrok $0 \Rightarrow 1 = 1$ - pravda

d) Jestliže je Země plochá, tak se dá srolovat do igelitky. \Rightarrow výrok $0 \Rightarrow 0 = 1$ - pravda

Př. 6: Pomocí tabulky pravdivostních hodnot rozhodni, kdy je pravdivý výrok $(a \wedge b) \Rightarrow a$.

a	b	$a \wedge b$	$(a \wedge b) \Rightarrow a$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Výrok $(a \wedge b) \Rightarrow a$ je pravdivý vždy nezávisle na tom, zda jsou pravdivé výroky a, b , ze kterých je sestaven. Takový výrok se nazývá **tautologie**.

Př. 7: Dosad' do formule $(a \wedge b) \Rightarrow a$ dva libovolné konkrétní výroky a, b a ověř, že jsi získal pravdivý výrok.

Zvolíme třeba dva nepravdivé výroky:

a : Číslo 5 je sudé.

b : Číslo 5 je záporné.

Získáváme výrok: „Je-li číslo 5 sudé a zároveň záporné, pak je sudé.“

Př. 8: Najdi další tautologie. Pravdivost odhadu dokaž pomocí tabulky pravdivostních hodnot a ověř dosazením libovolných výroků.

Možností je mnoho, ty nejjednodušší.

$a \vee \neg a$ - (u disjunkce stačí jeden pravdivý výrok, sestavíme-li ji z výroku a a jeho negace, vždy je právě jeden z nich pravdivý)

a	$\neg a$	$a \vee \neg a$
1	0	1
0	1	1

Zkusíme nepravdivý výrok a : Země je placatá.

$a \vee \neg a$: Země je nebo není placatá.

$a \Rightarrow a$ - (implikace je nepravdivá jen s pravdivým předpokladem a nepravdivým závěrem, pokud použijeme jediný výrok nemůže tato situace nikdy nastat)

a	$a \Rightarrow a$
1	1
0	1

Zkusíme nepravdivý výrok a : Země je placatá.

$a \Rightarrow a$: Je-li Země placatá, pak je placatá.

Pedagogická poznámka: V předchozích dvou příkladech by měli studenti do formulí dosazovat svoje vlastní výroky, aby si dosazováním vyzkoušeli, že všechny výroky jsou pravdivé.

Předchozí příklad ukazuje sílu formální logiky. Získali jsme dvě formule, jejichž výsledek známe, bez ohledu na konkrétní výrok, který do nich dosadíme.

Tím se dostáváme k důležitosti formální logiky v běžném životě.

Formální logika může pomoci dospívajícímu při výslechu rodičů. V odpovědích na zvědavé dotazy rodičů můžeme používat tautologie, nebudeme tak lhát a rodiče se nic nedovědí (pokud nebudeme chtít).

Například na otázku: „Tak co, byla jsi tam s tím šaškem?“, můžeme použít obě předchozí tautologie:

- „Byla jsem tam s ním nebo jsem tam s ním nebyla“
- „Jestli jsem tam s ním byla, pak jsem tam s ním byla“ (případně ještě vhodnější „Jestli jsem tam s ním nebyla, pak jsem tam s ním nebyla“).

Př. 9: Petáková:
strana 10/cvičení 5
strana 10/cvičení 6
strana 10/cvičení 7 b)

Pedagogická poznámka: Pokud budou žáci sestavovat shrnutí sami, je třeba ohlídat, jestli se tam nevyskytují věty typu: "Z nepravdy vyplývá pravda".

Shrnutí: Vyplývání z nepravdy je pravdivé.